5 GRUP SIKLIK

Definisi 5.1.

Misalkan G adalah grup, dan $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ bilangan bulat}\}$. G disebut grup siklik jika ada $g \in G$ sedemikian sehingga $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Elemen g pada G disebut generator dari grup siklik tersebut. ■

Beberapa hal yang perlu diperhatikan:

1. Jika G merupakan grup siklik dengan generator g yaitu $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, maka grup G itu cukup ditulis dengan $<g>$ atau (g).
2. Penulisan $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ yang menyatakan bahwa G grup siklik dengan generator g, biasanya dipakai untuk grup G yang operasi binernya multiplikatif (perkalian) sedangkan untuk grup G yang operasi binenya aditif (penjumlahan) dinotasikan dengan $G = \{ng \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Contoh 5.1.

$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup siklik dengan generator 1 dan -1 karena $\mathbb{Z} = \{n(1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dan $\mathbb{Z} = \{n(-1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sedangkan $(\mathbb{R}, +)$ bukan grup siklik karena tidak ada satupun unsur $g \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\mathbb{R} = \{n(g) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. ■

Teorema 5.1.

Setiap grup siklik adalah grup komutatif atau abelian. (Pembuktiannya ditinggalkan sebagai latihan). ■

Definisi 5.2.

Diketahui $(G, *)$ merupakan grup siklik. Jika elemen-elemen pada G berhingga maka order dari G adalah jumlah elemen pada G. Jika elemen-elemen pada G tidak berhingga maka order dari G adalah tidak berhingga. Order dari G dinotasikan dengan $|G|$. ■

Blog: aswhat.wordpress.com
Email: as_wad82@yahoo.co.id

Contoh 5.2.

Himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan grup siklik yang memiliki order tidak berhingga. ■

Perhatikan bahwa jika $G = \langle a \rangle$ adalah grup siklik berorder hingga dan sebutlah ordernya itu adalah m, maka elemen-elemen yang berbeda dari G adalah $e = a^0$, a, a^2, a^3, ..., a^{m-1}.

Contoh 5.3.

Jika $G = \langle g \rangle$ grup siklik berorder 5 maka $G = \{e = g^0, g, g^2, g^3, g^4\}$. ■

Definisi 5.3.

Order (peroide) sebuah elemen g dari grup G adalah bilangan bulat positif terkecil m sedemikian sehingga $g^m = e$ (untuk operasi multiplikatif) atau $m(g) = e$ (untuk operasi aditif), dengan e adalah elemen identitas dari grup G. Jika tidak ada bilangan bulat positif terkecil seperti m, maka dikatakan bahwa g berorder tidak berhingga. ■

Catatan: jika elemen g berorder m, maka ditulis $o(g) = m$.

Contoh 5.4.

Misalkan $K = \{1, -1, i. –i\}$, dengan $i = \sqrt{-1}$. Himpunan K terhadap operas perkalian bilangan kompleks merupakan grup. Maka:

Order dari 1 adalah 1 karena $1^1 = 1$ (elemen identitas),

Order dari -1 adalah 2 karena $(-1)^2 = 1$ (elemen identitas),

Order dari i adalah 4 karena $(i)^4 = 1$ (elemen identitas),

Order dari $-i$ adalah 4 karena $(-i)^4 = 1$ (elemen identitas).

Secara singkat dapat ditulis: $o(1) = 1$, $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$, dan $o(-i) = 4$.

Teorema 5.2.

Jika $G = \langle a \rangle$ adalah grup siklik berorder n, maka sebuah elemen $a^m \in G$ dengan $1 \leq m < n$ adalah generator dari G jika dan hanya jika FPB $(m, n) = 1$. ■

Blog: aswhat.wordpress.com
Email: as_wad82@yahoo.co.id

Perhatikan kembali Contoh 5.4. pada himpunan $K = \{1, -1, i, -i\}$, dengan $i = \sqrt{-1}$, memiliki generator i dan –i, sehingga grup K dapat dinyakan kembali menjadi $K = \{i^0 = 1, i^1, i^2, i^3\}$ atau $K = \{(-i)^0 = 1, (-i)^1, (-i)^2, (-i)^3\}$. Karena o(K) = 4, maka menurut teorema 5.2, i dan i^3 merupakan generator dari K sebab pangkat dari i adalah 1 dan pangkat dari i^3 adalah 3 sehingga FPB(1, 4) = 1 dan FPB(3, 4) = 1. Perhatikan kembali bahwa $i^3 = -i$.

Sebagai akibat dari Teorema 5.2, banyaknya generator yang berbeda dari grup siklik $G = \langle a \rangle$ berorder n dapat diketahui dengan menggunakan fungsi Euler $\varphi(n)$ yang mendefinisikan banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari n dan relatif prima dengan n sebagai berikut:

Jika $n = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_s^{\alpha s}$ adalah faktorisasi prima dari n maka banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari n dan relatif prima dengan n adalah

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_s}\right)$$

Contoh 5.5.

Misalkan G = <g> grup siklik berorder 18.

a. Berpakah banyaknya generator yang berbeda dari grup G tersebut?
b. Tulislah semua generator dari grup G tersebut.

Penyelesaian:

a. Karena faktorisasi prima dari 18 adalah $18 = 2 \times 3^2$, maka banyaknya generator dari grup G adalah $\varphi(18) = 18\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 18\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = 6$ buah.
b. Keenam generator yang berbeda dari grup siklik G = <g> berorder 18 itu adalah g, g^5, g^7, g^{11}, g^{13}, dan g^{17}. Ingat bahwa 1, 5, 7, 11, 13, dan 17 masing-masing relatif prima dengan 18 karena FPB(1, 18) = FPB(5, 18) = FPB(7, 18) = FPB(11, 18) = FPB(13, 18) = FPB(17, 18) = 1.

Blog: aswhat.wordpress.com
Email: as_wad82@yahoo.co.id

Definisi 5.4.

Misalkan $n \in \mathbb{Z}$. Untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \equiv b \pmod{n}$ jika $a - b$ habis dibagi dengan n.■

Perhatikan bahwa:

$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) / n$

atau $a - b = un$, untuk suatu $u \in \mathbb{Z}$

atau $a = b + un$, untuk suatu $u \in \mathbb{Z}$

Misalnya:

$17 \equiv 3 \pmod{7}$ karena $(17 - 3)$ habis dibagi dengan 7 atau $17 = 3 + 2.7$.

$17 \not\equiv 3 \pmod{8}$ karena $(17 - 3)$ tidak habis dibagi dengan 8.

Untuk selanjutnya, suatu himpunan bilangan bulat modulo n dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$.

Contoh 5.5.

Himpunan semua bilangan bulat modulo 6 yaitu $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ merupakan grup siklik dengan generator 1 dan 5 karena $\mathbb{Z}_6 = \{n(1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dan $\mathbb{Z}_6 = \{n(5) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, sehingga $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle$ atau $\mathbb{Z}_6 = \langle 5 \rangle$.

Blog: aswhat.wordpress.com
Email: as_wad82@yahoo.co.id